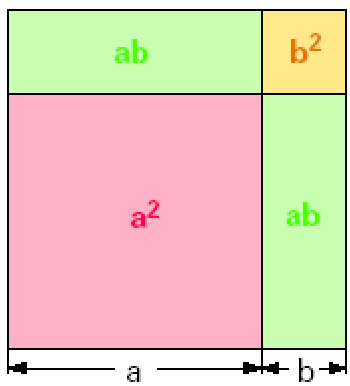
Gymnasium Hilpoltstein – Grundwissen 9. Jahrgangsstufe

Wissen / Können	Aufgaben und Beispiele
1. Rechnen mit Wurzeln	
Quadratwurzel $\sqrt{a}$ „Wurzel aus a“ ist diejenige Zahl größer oder gleich Null, die mit sich selbst multipliziert a ergibt. Dabei muss $a \geq 0$ sein.	$\sqrt{25}=5$; $\sqrt{-16}$ ist <u>nicht</u> definiert; $\sqrt{(-3)^2}=3$; $\sqrt{(x-8)^2}=\|x-8\|$; Allgemein: $\sqrt{a^2}=\|a\|=\begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a<0 \end{cases}$
Reelle Zahlen Jeder unendliche, <u>nicht</u> periodische Dezimalbruch beschreibt eine **irrationale Zahl**. Die Menge der rationalen und die Menge der irrationalen Zahlen bilden zusammen die **Menge der reellen Zahlen R.**	$\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$; π; 1,010010001... $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$
Rechenregeln für Wurzeln Produktregel	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$;
Quotientenregel	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$; $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{2}:\sqrt{3}=\sqrt{2:3}$
VORSICHT!!!	$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\neq\sqrt{a\pm b}$; $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$
ANWENDUNGEN: • Teilweises Radizieren	$\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$
• Rationalmachen des Nenners	$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$
• Summen/Differenzen von Wurzeln	$5\sqrt{3}-\sqrt{3}=(5-1)\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}$
n-te Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ „n-te Wurzel aus a“ ist diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. Dabei muss $a \geq 0$ sein, $n \in \mathbf{N}$ und $n \geq 2$. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$	$\sqrt[3]{8}=2$ denn $2^3=8$ $\sqrt[3]{-8}$ existiert nicht!

Potenzen mit rationalen Exponenten $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$	$7^{-3}=\frac{1}{7^3}=\frac{1}{343}$ $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2\quad 16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^3=8$ $9^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{9^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}=3^{-1}$
Potenzgesetze	Sind $r, s \in \mathbf{Q}$ und $a, b \in \mathbf{R}^+$, so gilt :
für Potenzen mit gleicher Basis	$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\qquad 4^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{6}}=4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$ $a^r : a^s = a^{r-s}$ $\qquad 4^{\frac{1}{3}}:4^{\frac{1}{6}}=4^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$
für Potenzen mit gleichem Exponenten	$a^r \cdot b^r = (a\cdot b)^r$ $\qquad 3^8\cdot 2^8=(3\cdot 2)^8=6^8$ $a^r : b^r = (a:b)^r$ $\qquad 6^{-8}:2^{-8}=(6:2)^{-8}=3^{-8}$
für Potenzen von Potenzen	$(a^r)^s = a^{r\cdot s}$ $\qquad \left(8^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=8^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}=8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

2. Binomische Formeln

PLUSFORMEL	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
MINUSFORMEL	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
PLUSMINUSFORMEL	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$



ANWENDUNGEN	
• Ausmultiplizieren	$\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=$ $=8+4\sqrt{6}+3=11+4\sqrt{6}$
• Faktorisieren	$4x^2-1=(2x)^2-1^2=(2x+1)(2x-1)$
• Rationalmachen des Nenners	$\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$ $=\frac{5\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2-3}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{-1}=-5\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

3. Quadratische Gleichungen

Für eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ gilt:

Ist die Diskriminante $D = b^2 - 4ac < 0$, so gibt es keine Lösung:

Ist $D = 0$, so gibt es genau eine Lösung.

Ist $D > 0$, so gibt es die beiden Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(„Mittternachtsformel“)

Lösen quadratischer Gleichungen

- Durch Isolieren von x

$$5x^2 - 15 = 0$$
$$5x^2 = 15$$
$$x^2 = 3$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

- Durch Faktorisieren

$$2x^2 - 3x = 0$$
$$x \cdot (2x - 3) = 0$$
$$x = 0 \text{ oder } 2x - 3 = 0$$
$$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{3}{2}$$

- Mit der „Mitternachtsformel“

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$
$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{3}$$

4. Quadratische Funktionen - Parabeln

Normalform

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**.

a bestimmt die Gestalt der Parabel:
Für ***a > 0*** gilt: nach **oben** geöffnet und
für ***a< 0*** gilt: nach **unten** geöffnet.

Der tiefste bzw. höchste Punkt ist der Scheitel der Parabel.

Scheitelform

$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$

mit Scheitel S(x_S|y_S)

Faktorisierte Form (Nullstellenform)

$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

mit den Nullstellen x_1 und x_2

Beispiel: $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$ (Normalform)

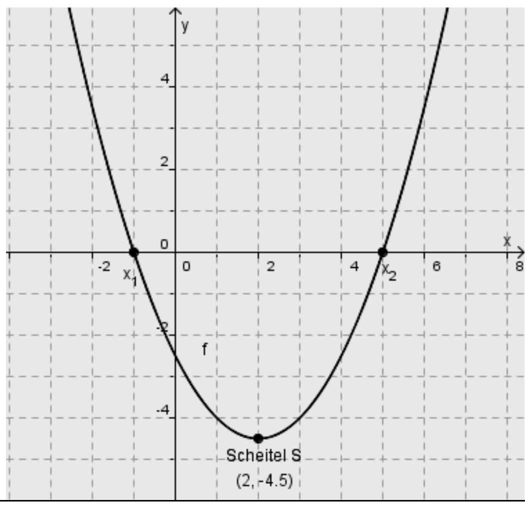
Umformen der Normalform in die Scheitelform durch **quadratische Ergänzung.**

$$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5 =$$
$$= 0{,}5(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 2{,}5 =$$
$$= 0{,}5(x^2 - 4x + 2^2) - 0{,}5 \cdot 2^2 - 2{,}5 =$$
$$= 0{,}5(x - 2)^2 - 4{,}5$$

Scheitel *S(2|-4,5)*

$f(x) = 0{,}5 \cdot (x + 1) \cdot (x - 5)$

Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$



5. Mehrstufige Zufallsexperimente

Pfadregeln

1.) Die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses** ist gleich dem **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

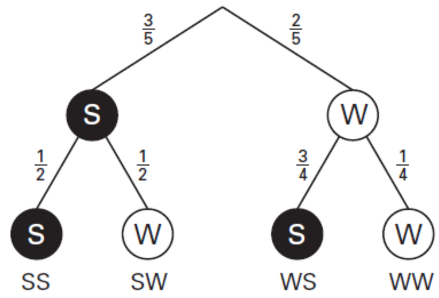
2.) Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** ist gleich der **Summe** der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiel:

Aus einer Urne mit drei schwarzen und zwei weißen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

$\Omega = \{ss; sw; ws; ww\}$

$P(ss) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$



$P(\text{verschiedene Kugeln}) = P(sw) + P(ws) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$

6. Satzgruppe des Pythagoras

Satz des Pythagoras:
Wenn ein Dreieck ABC in C rechtwinklig ist, dann sind die Flächen der Quadrate über den beiden Katheten a *und* b zusammen flächengleich zum Quadrat über seiner Hypotenuse c :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

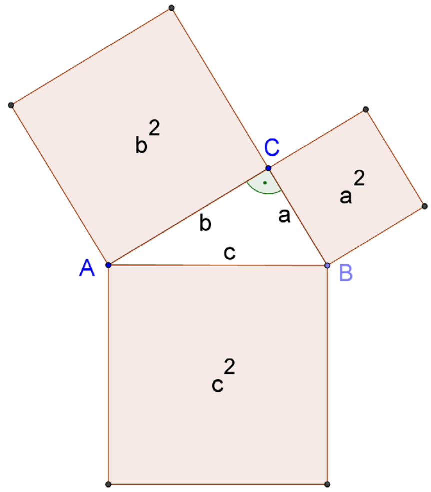
Auch die **Umkehrung** dieses Satzes ist **richtig**:

Gilt in einem Dreieck ABC (mit den Seitenlängen a, b und c) die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist es rechtwinklig im Punkt C .

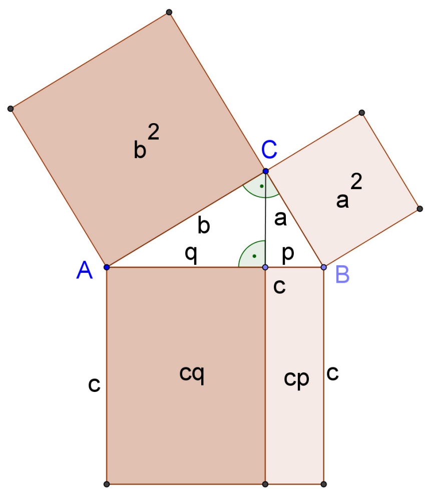
Kathetensatz:
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich zum Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt:

$$a^2 = c \cdot p \; ; \quad b^2 = c \cdot q$$

Satz des Pythagoras:



Kathetensatz:



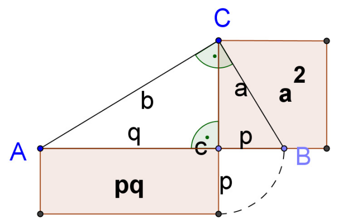
Höhensatz:
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe (auf der Hypotenuse) flächengleich zum Rechteck aus den beiden Hypothenusenabschnitten:

$$h^2 = p \cdot q$$

Nützliche Folgerungen:

- Diagonale im Quadrat : $a\sqrt{2}$
- Raumdiagonale Würfel: $a\sqrt{3}$
- Höhe gleichseitiges Δ : $\frac{a}{2}\sqrt{3}$

Höhensatz:



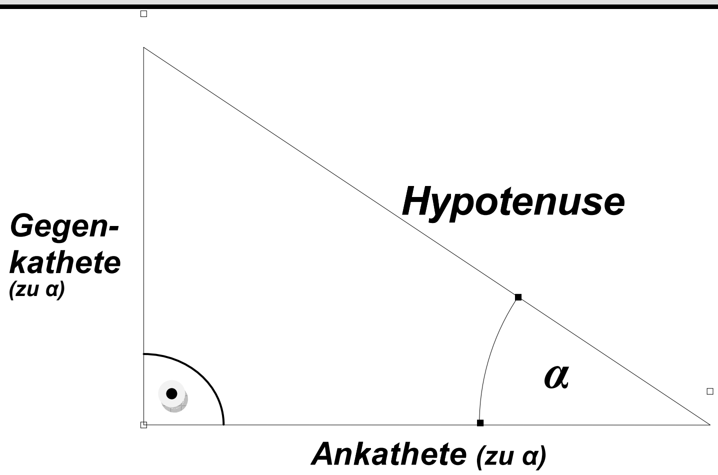
7. Trigonometrie

Im **rechtwinkligen** Dreieck mit Winkel **α** gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha}$$



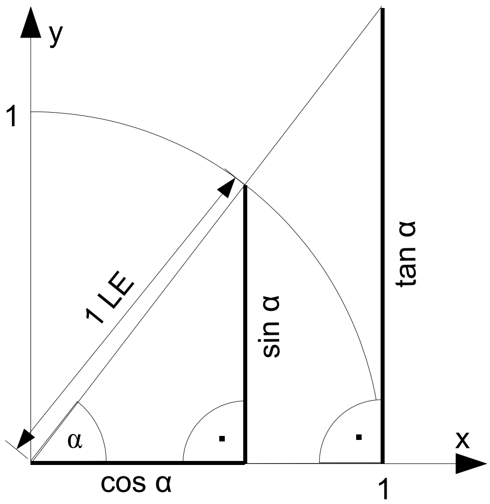
Am **Einheitskreis** gilt für alle Winkel

α mit $0 \leq \alpha \leq 90°$:

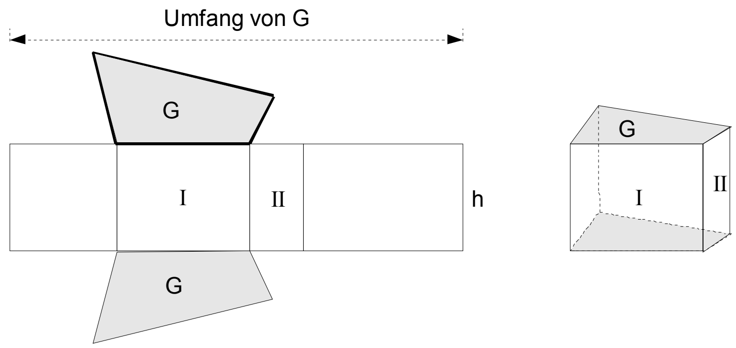
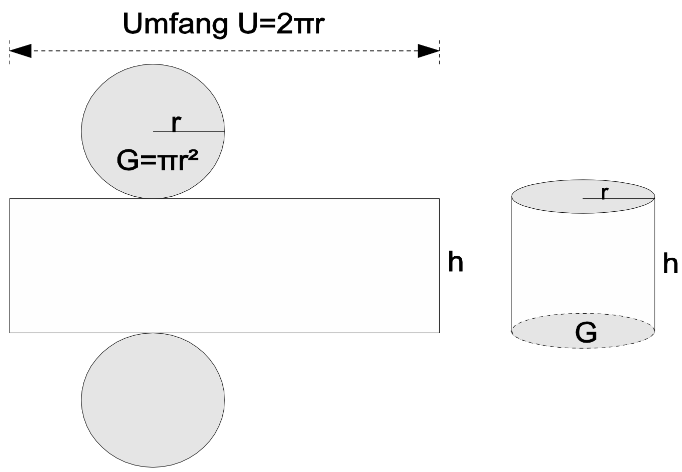
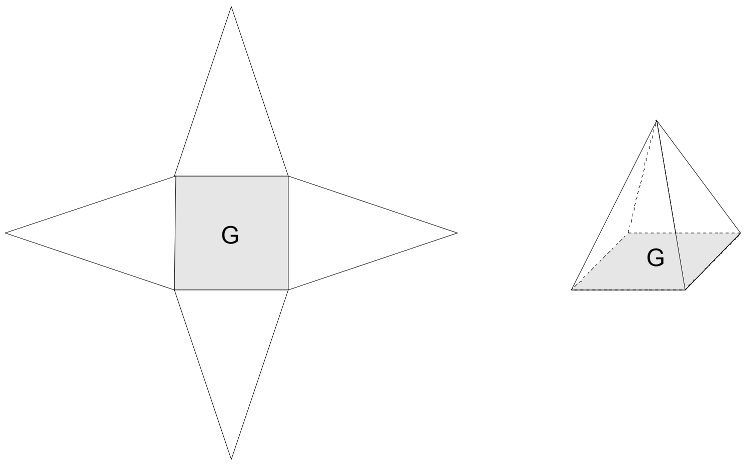
- $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ und

  $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$
- $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$
- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $[\alpha \neq 90°]$

(folgt aus dem Strahlensatz,
vgl. Abbildung)



8. Raumgeometrie

Prisma: Mantelfläche: $M = U \cdot h$ Volumen: $V = G \cdot h$ Oberfläche: $O = 2G + M$	
Zylinder: Oberfläche: : $O = 2G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$ Volumen: $V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$	
Pyramide: Oberfläche: $O = G + M$ Volumen: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$	
Kegel: Winkel des Mantelsektors: $\mu = \frac{r}{m} \cdot 360°$ Oberfläche: $O = G + M = \pi r^2 + \pi r m$ Volumen: $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$